

案情卷宗題幹

CASE #01 / 65

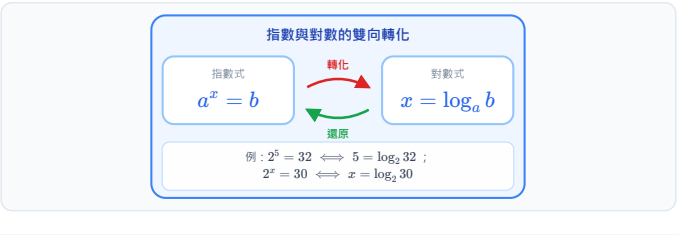
對數的由來與符號意義

「對數」在 17 世紀由蘇格蘭數學家納皮爾所發明。
為解決繁複的天文數字運算，他將乘除轉化為加減。
例如： $2^x = 32 \implies x = 5$ ；
但若 $2^x = 30$ ，無法以有限小數精確寫出，
故定義全新符號： $x = \log_2 30$ 表示其精確解。

🕵️ 柯南破案導引：對數就是「求指數次方」！ $\log_a b$ 是問：底數 a 要自乘幾次方才會等於真數 b ？

🔍 名偵探推理筆記 · 線索推理鏈

- 線索 1：歷史背景與運算簡化 17 世紀天文航海需要龐大乘除計算，納皮爾發明對數，將繁雜的「乘除運算」透過指數對應轉化為簡易的「加減運算」。
- 線索 2：超越整數指數的符號誕生 當 $2^x = 32 = 2^5$ 時 $x = 5$ 。若 $2^x = 30$ ，因 $2^4 = 16 < 30 < 32 = 2^5$ ，解必在 4 到 5 之間，記作 $x = \log_2 30$ 。
- 線索 3：雙向互換本質 指數式與對數式本質互通：底數在下方保持不變，指數與結果位置互換： $a^x = b \iff x = \log_a b$ 。
- 【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】 $a^x = b \iff x = \log_a b$ (底數在下不動，指數是求得的對數值)



案情卷宗題幹

CASE #02 / 65

對數的定義與存在條件

設 $a > 0$ 、 $a \neq 1$ 且 $b > 0$ 。

若 $a^x = b$ ，以符號 $\log_a b$ 表示 x ：

$$a^x = b \iff x = \log_a b$$

符號 $\log_a b$ 念作「以 a 為底數時， b 的對數」。

其中稱 a 為底數，稱 b 為真數。

 柯南破案導引：1. 底數大於 0；2. 底數不能等於 1；3. 真數必須嚴格大於 0！缺少任一項對數即無意義。

名偵探推理筆記 · 線索推理鏈

線索 1：底數條件的來源 ($a > 0, a \neq 1$) 指數函數 $y = a^x$ 定義規定底數 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ 。若 $a \leq 0$ ，實數次方會出現虛數；若 $a = 1$ ， $1^x = 1$ 為常數函數，無法求出唯一的 x 。

線索 2：真數條件的來源 ($b > 0$) 因為正數的任意次方恆為正數 ($a^x > 0$)，其圖形全在 x 軸上方，故真數 $b = a^x$ 必須嚴格滿足 $b > 0$ 。

線索 3：存在條件整合檢核 任何對數式 $\log_a b$ 有意義，必須三條件同時成立： $a > 0$ 、 $a \neq 1$ 、 $b > 0$ ，缺一不可！

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】 $\log_a b$ 有意義 $\iff a > 0$ 且 $a \neq 1$ (底數兩條件) 且 $b > 0$ (真數一條件)

對數存在的「黃金三條件」

底數 a (兩大限制)

$$a > 0 \text{ 且 } a \neq 1$$

基底必須為非 1 正數

真數 b (一大限制)

$$b > 0$$

真數必須嚴格大於 0

$$\log_a b \text{ 有意義 } \iff a > 0, a \neq 1 \text{ 且 } b > 0$$

案情卷宗題幹

CASE #03 / 65

對數的五大基本運算性質

設 a, M, N 為正實數且 $a \neq 1, r, s$ 為實數且 $r \neq 0$:

- $\log_a 1 = 0, \log_a a = 1$
- $\log_{a^r} M^s = \frac{s}{r} \log_a M$
- $\log_a M + \log_a N = \log_a (MN)$
- $\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$
- $a^{\log_a M} = M$

 柯南破案導引：對數相加等於真數相乘；對數相減等於真數相除；次方提出時「分子是真數次方・分母是底數次方」！

名偵探推理筆記・線索推理鏈

線索 1：基礎值與次方提出律 因 $a^0 = 1, a^1 = a$ ・得 $\log_a 1 = 0, \log_a a = 1$ ・真數次方 s 提至前方分子・底數次方 r 提至前方分母： $\log_{a^r} M^s = \frac{s}{r} \log_a M$ ・

線索 2：和差化積商律證明 令 $M = a^r, N = a^s$ ・則 $MN = a^{r+s}$ ・故 $\log_a (MN) = r + s = \log_a M + \log_a N$ ・同理 $\frac{M}{N} = a^{r-s}$ 導出減法公式・

線索 3：還原恆等式 若令 $\log_a M = k$ ・則依定義 $a^k = M$ ・將 $k = \log_a M$ 代回即得 $a^{\log_a M} = M$ ・

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】 同底對數加減化為真數乘除・次方提前化簡： $\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N, \log_{a^r} M^s = \frac{s}{r} \log_a M$

五大基本對數運算性質速覽

- | | |
|--|---|
| 1. 特殊值
$\log_a 1 = 0, \log_a a = 1$ | 2. 次方提出律
$\log_{a^r} M^s = \frac{s}{r} \log_a M$ |
| 3. 和化積 / 差化商
$\log_a M \pm \log_a N = \log_a (M \cdot N^{\pm 1})$ | 4. 互逆恆等式
$a^{\log_a M} = M$ |

口訣：同底相加真數相乘・同底相減真數相除・次方提出前置係數

案情卷宗題幹

CASE #04 / 65

換底公式・連鎖律與倒數性質

設 a, b, c, d 均為非 1 正實數， $M > 0$ ：

6. 換底公式： $\log_a M = \frac{\log_c M}{\log_c a}$

7. 連鎖律： $\log_a b \times \log_b c \times \log_c d = \log_a d$

8. 倒數性質： $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

 柯南破案導引：遇到異底對數時，統一換成常用底數 10，即可如多項式分數般進行上下交叉約分！

名偵探推理筆記・線索推理鏈

線索 1：換底公式之推導 令 $\log_a M = r \implies M = a^r$ ，兩邊取以 c 為底的對數： $\log_c M = \log_c a^r = r \log_c a$ ，移項得 $r = \frac{\log_c M}{\log_c a}$ 。

線索 2：連鎖律之約分效應 利用換底公式將各項換為以 10 為底： $\frac{\log b}{\log a} \times \frac{\log c}{\log b} \times \frac{\log d}{\log c} = \frac{\log d}{\log a} = \log_a d$ ，中間項分子分母完全約去。

線索 3：底真數對調之倒數關係 令 $d = a$ 代入連鎖律： $\log_a b \times \log_b a = \log_a a = 1$ ，故 $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ 。

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】 換底公式： $\log_a M = \frac{\log_c M}{\log_c a}$ ；連鎖約分： $\log_a b \times \log_b c = \log_a c$ ；倒數： $\log_a b \times \log_b a = 1$

換底公式與骨牌式連鎖律

換底公式
 $\log_a M = \frac{\log_c M}{\log_c a}$
 可引進任意新底數 c

連鎖律 (骨牌約分)
 $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$
 倒數： $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

核心應用：面對異底對數乘積時，統一換成常用底數 10 進行上下約分

案情卷宗題幹

CASE #05 / 65

對數的定義辨析

下列各式哪幾個是有意義的對數？

- (A) $\log_1 5$
- (B) $\log_5 1$
- (C) $\log_{-2} 3$
- (D) $\log_2 \frac{1}{5}$
- (E) $\log_3(-4)$

 柯南破案導引：審題重點：檢核底數是否滿足「 $a > 0, a \neq 1$ 」，並檢核真數是否滿足「 $b > 0$ 」。

🔍 名偵探推理筆記 · 線索推理鏈

線索 1：檢驗 (A)、(B) (A) $\log_1 5$ 底數為 1，不合規定（底數不可為 1）。
(B) $\log_5 1$ 底數 $5 > 0, 5 \neq 1$ ，真數 $1 > 0$ ，符合定義（值為 0）。

線索 2：檢驗 (C)、(D) (C) $\log_{-2} 3$ 底數為 $-2 < 0$ ，不合規定。
(D) $\log_2 \frac{1}{5}$ 底數 $2 > 0, 2 \neq 1$ ，真數 $\frac{1}{5} > 0$ ，符合定義。

線索 3：檢驗 (E) 並結論 (E) $\log_3(-4)$ 真數為 $-4 < 0$ ，不合規定（真數必須大於 0）。故僅 (B)、(D) 有意義。

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】正確選項為 (B)、(D)

例題 1 各選項定義檢核

(A) $\log_1 5$	× 底數為 1 不合
(B) $\log_5 1 = 0$	✓ 底數 $5 > 0, \neq 1$ ；真數 $1 > 0$
(C) $\log_{-2} 3$	× 底數 $-2 < 0$
(D) $\log_2 \frac{1}{5}$	✓ 底數 $2 > 0, \neq 1$ ；真數 $\frac{1}{5} > 0$
(E) $\log_3(-4)$	× 真數 $-4 < 0$

案情卷宗題幹

CASE #06 / 65

對數的定義辨析

下列各式哪幾個是有意義的對數？

- (A) $\log_2 0$
- (B) $\log_0 2$
- (C) $\log_{\frac{1}{2}} 5$
- (D) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{5}{3}$
- (E) $\log_{-3}(-2)$

 柯南破案導引：嚴格把握「底數 > 0 且 $\neq 1$ ；真數 > 0 」。負數或 0 均不合
法！

名偵探推理筆記 · 線索推理鏈

- 線索 1：檢驗 (A)、(B)** (A) $\log_2 0$ 真數為 0 ，不合（真數必須嚴格大於 0 ）。
(B) $\log_0 2$ 底數為 0 ，不合（底數必須嚴格大於 0 ）。
- 線索 2：檢驗 (C)、(D)** (C) $\log_{\frac{1}{2}} 5$ 底數 $\frac{1}{2} > 0, \neq 1$ ，真數 $5 > 0$ ，符合定義。
(D) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{5}{3}$ 底數 $\frac{1}{2} > 0, \neq 1$ ，真數 $\frac{5}{3} > 0$ ，符合定義。
- 線索 3：檢驗 (E) 並結論** (E) $\log_{-3}(-2)$ 底數 $-3 < 0$ 且真數 $-2 < 0$ ，兩者均不合，故只有 (C)、(D) 有意義。

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】正確選項為 (C)、(D)

隨堂練習 1 定義檢核結果

(A) $\log_2 0$	× 真數不可為 0
(B) $\log_0 2$	× 底數不可為 0
(C) $\log_{\frac{1}{2}} 5$	✓ 底數 $\frac{1}{2} > 0, \neq 1$ ；真數 $5 > 0$
(D) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{5}{3}$	✓ 底數與真數均為正數
(E) $\log_{-3}(-2)$	× 底數與真數均為負數

案情卷宗題幹

CASE #07 / 65

對數存在的必要條件

若 $\log_{x-1}(x+5)$ 有意義，
則 x 的範圍為何？

 柯南破案導引：列出不等式組：真數 > 0 、底數 > 0 且底數 $\neq 1$ ，最後在數線上取三者交集！

名偵探推理筆記 · 線索推理鏈

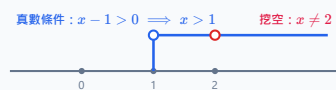
線索 1：列出真數條件 真數必須大於 0： $x+5>0 \implies x>-5$ 。

線索 2：列出底數條件 底數必須大於 0 且不為 1： $x-1>0 \implies x>1$ ；且
 $x-1\neq 1 \implies x\neq 2$ 。

線索 3：數線交集得出範圍 綜合以上： $x>-5$ 與 $x>1$ 取交集為 $x>1$ ，且排除 $x=2$ 。故 $x>1$ 且 $x\neq 2$ 。

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】 $x>1$ 且 $x\neq 2$

數線交集圖解： $x>1$ 且 $x\neq 2$



解集合： $x>1$ 且 $x\neq 2$

案情卷宗題幹

CASE #08 / 65

對數存在的必要條件

若 $\log_{x+2}(3-x)$ 有意義，
則 x 的範圍為何？

 柯南破案導引：真數 $3-x > 0$ ，底數 $x+2 > 0$ 且 $x+2 \neq 1$ 。注意負號移項變號！

名偵探推理筆記 · 線索推理鏈

線索 1：列出真數條件 真數必須大於 0： $3-x > 0 \implies x < 3$ 。

線索 2：列出底數條件 底數必須大於 0 且不為 1： $x+2 > 0 \implies x > -2$ ；且 $x+2 \neq 1 \implies x \neq -1$ 。

線索 3：求交集得出區間 取 $x < 3$ 與 $x > -2$ 的交集得 $-2 < x < 3$ ；再扣除 $x = -1$ ，得 $-2 < x < 3$ 且 $x \neq -1$ 。

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】 $-2 < x < 3$ 且 $x \neq -1$



案情卷宗題幹

CASE #09 / 65

對數求值：以 2 為底

試求下列對數之值：

$$\log_2 64$$

 柯南破案導引：解題思維：將真數 64 化為以底數 2 為基底的指數次方形式： $64 = 2^k$ 。

🔍 名偵探推理筆記 · 線索推理鏈

線索 1：質因數分解真數 $64 = 2 \times 32 = 2 \times 2^5 = 2^6$ 。

線索 2：套用對數定義求值 由定義 $2^6 = 64 \iff \log_2 64 = 6$ (或使用 $\log_2 2^6 = 6 \log_2 2 = 6 \times 1 = 6$) 。

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】 $\log_2 64 = 6$

指數轉換還原法

$$64 = 2^6$$

↓

$$\log_2 64 = 6$$

案情卷宗題幹

CASE #10 / 65

對數求值：負指數型

試求下列對數之值：

$$\log_3 \frac{1}{81}$$

 柯南破案導引：解題思維：真數是分數，利用負指數關係： $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ 。

名偵探推理筆記 · 線索推理鏈

線索 1：將真數化為底數 3 的次方 $81 = 3^4$ ，因此分數 $\frac{1}{81} = \frac{1}{3^4} = 3^{-4}$ 。

線索 2：由定義求得對數值 因為 $3^{-4} = \frac{1}{81}$ ，所以 $\log_3 \frac{1}{81} = -4$ 。

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】 $\log_3 \frac{1}{81} = -4$

負指數轉化求值

$$\frac{1}{81} = \frac{1}{3^4} = 3^{-4}$$

↓

$$\log_3 \frac{1}{81} = -4$$

案情卷宗題幹

CASE #11 / 65

對數求值：小數底數型

試求下列對數之值：

$\log_{0.1} 0.001$

 柯南破案導引：解題思維：觀察 0.1 的幾次方會等於 0.001？注意小數位數！

🔍 名偵探推理筆記 · 線索推理鏈

線索 1：觀察小數自乘次數 $0.1 = 10^{-1} \cdot 0.001 = 10^{-3} = (0.1)^3$ 。

線索 2：套用定義得解 因為 $(0.1)^3 = 0.001$ ，故 $\log_{0.1} 0.001 = 3$ 。

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】 $\log_{0.1} 0.001 = 3$

小數連乘轉化

$0.001 = (0.1)^3$

↓

$\log_{0.1} 0.001 = 3$

案情卷宗題幹

CASE #12 / 65

對數求值：底數大於真數

試求下列對數之值：

$$\log_{25} 5$$

 柯南破案導引：解題思維：真數比底數小，開根號即為 $\frac{1}{2}$ 次方： $25^k = 5$ 。

名偵探推理筆記 · 線索推理鏈

線索 1：列出指數對應式 設 $25^k = 5$ 。由於 $\sqrt{25} = 5$ ，亦即 $25^{\frac{1}{2}} = 5$ 。

線索 2：得出對數值 因為 $25^{\frac{1}{2}} = 5$ ，所以 $\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$ 。

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】 $\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$

方根指數化轉化

$$\sqrt[3]{25} = (5^2)^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{2}{3}}$$

↓

$$\log_5 \sqrt[3]{25} = \frac{2}{3}$$

案情卷宗題幹

CASE #13 / 65

對數求值：以 3 為底

試求下列對數之值：

$\log_3 27$

 柯南破案導引：解題思維：思考 3 的幾次方等於 27？

🔍 名偵探推理筆記 · 線索推理鏈

線索 1：真數指數化 $27 = 3 \times 3 \times 3 = 3^3$ 。

線索 2：得出對數值 因為 $3^3 = 27$ ，故 $\log_3 27 = 3$ 。

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】 $\log_3 27 = 3$

指數還原法

$81 = 3^4$

↓

$\log_3 81 = 4$

案情卷宗題幹

CASE #14 / 65

對數求值：分數真數

試求下列對數之值：

$$\log_2 \frac{1}{32}$$

 柯南破案導引：解題思維： $32 = 2^5$ ，分數取倒數為負指數！

🔗 名偵探推理筆記 · 線索推理鏈

線索 1：分數轉負指數 $32 = 2^5 \implies \frac{1}{32} = 2^{-5}$ 。

線索 2：得出對數值 因為 $2^{-5} = \frac{1}{32}$ ，所以 $\log_2 \frac{1}{32} = -5$ 。

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】 $\log_2 \frac{1}{32} = -5$

負指數轉化求值

$$\frac{1}{32} = 2^{-5}$$

↓

$$\log_2 \frac{1}{32} = -5$$

案情卷宗題幹

CASE #15 / 65

對數求值：分數底數與真數

試求下列對數之值：

$$\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{625}$$

 柯南破案導引：解題思維：檢視底數 $\frac{1}{5}$ 要自乘幾次會得到 $\frac{1}{625}$ ？

 名偵探推理筆記 · 線索推理鏈

線索 1：觀察分子分母次方 $625 = 5^4$ ，因此 $\frac{1}{625} = (\frac{1}{5})^4$ 。

線索 2：得出對數值 因為 $(\frac{1}{5})^4 = \frac{1}{625}$ ，所以 $\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{625} = 4$ 。

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】 $\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{625} = 4$

小數自乘轉化

$$0.25 = (0.5)^2$$

↓

$$\log_{0.5} 0.25 = 2$$

案情卷宗題幹

CASE #16 / 65

對數求值：分數底與整數真數

試求下列對數之值：

$$\log_{\frac{1}{4}} 64$$

 柯南破案導引：解題思維：底數是 $\frac{1}{4} = 4^{-1}$ ，真數是 $64 = 4^3$ ！

 名偵探推理筆記 · 線索推理鏈

線索 1：統一化為基底 4 底數為 $\frac{1}{4} = 4^{-1}$ ，真數為 $64 = 4^3$ 。

線索 2：列出指數式求解 $(\frac{1}{4})^{-3} = (4^{-1})^{-3} = 4^3 = 64$ ，故 $\log_{\frac{1}{4}} 64 = -3$ 。

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】 $\log_{\frac{1}{4}} 64 = -3$

方根指數化轉化

$$\sqrt[4]{8} = (2^3)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{3}{4}}$$

↓

$$\log_2 \sqrt[4]{8} = \frac{3}{4}$$

案情卷宗題幹

CASE #17 / 65

對數基本性質：真數為 1 與底真相同

試求下列各式的值：

$$\log_5 1 + \log_3 3$$

 柯南破案導引：公式要點： $\log_a 1 = 0$ 且 $\log_a a = 1$ 。

🔍 名偵探推理筆記・線索推理鏈

線索 1：分別計算兩項 第一項：因為 $5^0 = 1$ ，所以 $\log_5 1 = 0$ 。
第二項：因為 $3^1 = 3$ ，所以 $\log_3 3 = 1$ 。

線索 2：兩項相加 $0 + 1 = 1$ 。

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】 $\log_5 1 + \log_3 3 = 1$

基本性質：特殊值相加

$$\log_5 1 = 0, \log_3 3 = 1$$

↓

$$0 + 1 = 1$$

案情卷宗題幹

CASE #18 / 65

對數基本性質：方根真數提出

試求下列各式的值：

$$\log_3 \sqrt{3}$$

 柯南破案導引：公式要點：根號轉為指數： $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$ ・利用 $\log_a M^s = s \log_a M$ ・

名偵探推理筆記・線索推理鏈

線索 1：真數轉分數指數 $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$ ・

線索 2：次方提前化簡 $\log_3 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_3 3 = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$ ・

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】 $\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$

次方提出律

$$\log_2 2^3 = \frac{3}{2} \log_2 2$$

↓

$$\frac{3}{2} \times 1 = \frac{3}{2}$$

案情卷宗題幹

CASE #19 / 65

對數基本性質：特徵值求和

試求下列各式的值：

$$\log_{0.25} 1 + \log_{100} 100$$

 柯南破案導引：公式要點：不論底數為何，只要真數為 1 則值為 0；底數真數相同則值為 1。

名偵探推理筆記・線索推理鏈

線索 1：分項計算 $\log_{0.25} 1 = 0$ (真數為 1)； $\log_{100} 100 = 1$ (底真相同)。

線索 2：兩數相加 $0 + 1 = 1$ 。

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】 $\log_{0.25} 1 + \log_{100} 100 = 1$

基本性質：特殊值相減

$$\log_7 7 = 1, \log_4 1 = 0$$

↓

$$1 - 0 = 1$$

案情卷宗題幹

CASE #20 / 65

對數基本性質：底數與真數次方提出

試求下列各式的值：

$$\log_{25} 125$$

 柯南破案導引：公式要點：底數 $25 = 5^2$ ・真數 $125 = 5^3$ ・利用 $\log_{a^r} M^s = \frac{s}{r} \log_a M$ 。

名偵探推理筆記・線索推理鏈

線索 1：底數與真數質因數分解 $25 = 5^2$ ・ $125 = 5^3$ ・原式寫為 $\log_{5^2} 5^3$ 。

線索 2：提出次方計算 $\log_{5^2} 5^3 = \frac{3}{2} \log_5 5 = \frac{3}{2} \times 1 = \frac{3}{2}$ 。

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】 $\log_{25} 125 = \frac{3}{2}$

底真數化為質因數次方

$$\log_{25} 2^4 = \frac{4}{3} \log_2 2$$

↓

$$\frac{4}{3} \times 1 = \frac{4}{3}$$

案情卷宗題幹

CASE #21 / 65

對數加法性質：同底對數相加

試求下列各式的值：

$\log_6 9 + \log_6 4$

 柯南破案導引：公式要點：同底對數相加 · 真數相乘：
 $\log_a M + \log_a N = \log_a (MN)$ 。

🔍 名偵探推理筆記 · 線索推理鏈

線索 1：合併真數相乘 $\log_6 9 + \log_6 4 = \log_6 (9 \times 4) = \log_6 36$ 。

線索 2：化簡對數值 $\log_6 36 = \log_6 6^2 = 2$ 。

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】 $\log_6 9 + \log_6 4 = 2$

同底對數加法化為真數乘積

$$\log_6 4 + \log_6 9 = \log_6 (4 \times 9)$$

↓

$$\log_6 36 = \log_6 6^2 = 2$$

案情卷宗題幹

CASE #22 / 65

對數減法性質：同底對數相減

試求下列各式的值：

$\log_5 45 - \log_5 9$

 柯南破案導引：公式要點：同底對數相減 · 真數相除：
 $\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$ 。

🔍 名偵探推理筆記 · 線索推理鏈

線索 1：合併真數相除 $\log_5 45 - \log_5 9 = \log_5 \left(\frac{45}{9} \right) = \log_5 5$ 。

線索 2：得出結果 $\log_5 5 = 1$ 。

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】 $\log_5 45 - \log_5 9 = 1$

同底對數減法化為真數相除

$\log_2 24 - \log_2 3 = \log_2 \frac{24}{3}$

↓

$\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$

案情卷宗題幹

CASE #23 / 65

對數連加連減綜合運算

試求下列各式的值：

$$\log_3 36 - \log_3 8 + \log_3 54$$

 柯南破案導引：公式要點：同底對數加減，正項真數放分子相乘，負項真數放分母相除！

名偵探推理筆記 · 線索推理鏈

線索 1：綜合成單一真數乘除 $\log_3 36 - \log_3 8 + \log_3 54 = \log_3 \left(\frac{36 \times 54}{8} \right)$ 。

線索 2：約分化簡分子分母 $\frac{36 \times 54}{8} = \frac{9 \times 54}{2} = 9 \times 27 = 243$ 。

線索 3：以 3 為底求值 $243 = 3^5$ ，故 $\log_3 243 = 5$ 。

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】 $\log_3 36 - \log_3 8 + \log_3 54 = 5$

同底連續加減連乘連除

$$\log_4 \frac{12 \times 24}{18} = \log_4 16$$

↓

$$\log_4 4^2 = 2$$

案情卷宗題幹

CASE #24 / 65

對數加法性質求值

試求下列各式的值：

$\log_8 16 + \log_8 32$

 柯南破案導引：解題思維：同底相加合為真數相乘，再將底數 8 與真數統一化為 2 的次方！

名偵探推理筆記 · 線索推理鏈

線索 1：合為真數乘積

$\log_8 16 + \log_8 32 = \log_8 (16 \times 32) = \log_8 (2^4 \times 2^5) = \log_8 2^9。$

線索 2：底數 8 化為 2 的次方提係數 $8 = 2^3$ ，故

$\log_{2^3} 2^9 = \frac{9}{3} \log_2 2 = 3 \times 1 = 3。$

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】 $\log_8 16 + \log_8 32 = 3$

同底相加真數相乘

$\log_2 \left(12 \times \frac{4}{3} \right) = \log_2 16$

↓

$\log_2 2^4 = 4$

案情卷宗題幹

CASE #25 / 65

對數減法性質求值

試求下列各式的值：

$\log_3 18 - \log_3 2$

 柯南破案導引：解題思維：同底相減化為真數相除，計算 $18 \div 2$ 。

🔍 名偵探推理筆記 · 線索推理鏈

線索 1：合為真數相除 $\log_3 18 - \log_3 2 = \log_3 \left(\frac{18}{2}\right) = \log_3 9$ 。

線索 2：化簡對數值 $9 = 3^2$ ，故 $\log_3 9 = 2$ 。

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】 $\log_3 18 - \log_3 2 = 2$

同底相減真數相除

$\log_{10} \frac{20}{2} = \log_{10} 10$

↓

$\log_{10} 10 = 1$

案情卷宗題幹

CASE #26 / 65

對數綜合加減求值

試求下列各式的值：

$$\log_2 12 + \log_2 40 - \log_2 15$$

 柯南破案導引：解題思維：正項真數 12 與 40 放分子相乘，負項真數 15 放分母！

名偵探推理筆記 · 線索推理鏈

線索 1：合併真數乘除 $\log_2 12 + \log_2 40 - \log_2 15 = \log_2 \left(\frac{12 \times 40}{15} \right)$ 。

線索 2：約分計算 $\frac{12 \times 40}{15} = \frac{4 \times 40}{5} = 4 \times 8 = 32$ 。

線索 3：得出對數值 $32 = 2^5$ ，故 $\log_2 32 = 5$ 。

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】 $\log_2 12 + \log_2 40 - \log_2 15 = 5$

真數連續運算化簡

$$\log_3 \frac{54 \times 18}{12} = \log_3 81$$

↓

$$\log_3 3^4 = 4$$

案情卷宗題幹

CASE #27 / 65

換底公式之逆運算

試求下列各式的值：

$\frac{\log_5 32}{\log_5 2}$

 柯南破案導引：公式要點：換底公式逆向使用： $\frac{\log_a M}{\log_a a} = \log_a M$ ！

名偵探推理筆記 · 線索推理鏈

線索 1：套用換底公式逆運算 分子分母底數同為 5，逆用換底公式：
 $\frac{\log_5 32}{\log_5 2} = \log_2 32$ 。

線索 2：計算對數值 因為 $32 = 2^5$ ，所以 $\log_2 32 = 5$ 。

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】 $\frac{\log_5 32}{\log_5 2} = 5$

係數移回真數次方化簡

$\log_3 6^2 - \log_3 4 = \log_3 \frac{36}{4}$

↓

$\log_3 9 = 2$

案情卷宗題幹

CASE #28 / 65

指數上的換底化簡

試求下列各式的值：

$$5^{\frac{\log_2 7}{\log_2 5}}$$

 柯南破案導引：解題思維：先將次方的分式化簡為單一對數，再利用 $a^{\log_a M} = M$!

名偵探推理筆記・線索推理鏈

線索 1：化簡指數部分的對數分式 次方為 $\frac{\log_2 7}{\log_2 5}$ 。由換底公式逆用，得 $\frac{\log_a 7}{\log_a 5} = \log_5 7$ 。

線索 2：代回原指數式消去 原式變為 $5^{\log_5 7}$ 。利用底數相同抵消性質 $a^{\log_a M} = M$ ，得結果為 7。

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】 $5^{\frac{\log_2 7}{\log_2 5}} = 7$

方根次方提出與商數化簡

$$\log_5 \sqrt{10} - \log_5 \sqrt{2} = \log_5 \sqrt{5}$$

↓

$$\log_5 5^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

案情卷宗題幹

CASE #29 / 65

複合底數指數運算

試求下列各式的值：

$9^{\log_3 5}$

 柯南破案導引：解題思維：底數 $9 = 3^2$ ，將次方 2 乘進對數或將 2 移入真數當次方！

🔍 名偵探推理筆記 · 線索推理鏈

線索 1：改寫底數 9 為 3 的平方 $9^{\log_3 5} = (3^2)^{\log_3 5} = 3^{2\log_3 5}$ 。

線索 2：將係數 2 移回真數次方 $2\log_3 5 = \log_3(5^2) = \log_3 25$ 。

線索 3：互消得出結果 $3^{\log_3 25} = 25$ 。

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】 $9^{\log_3 5} = 25$

常用對數係數還原化簡

$\log 5^2 + \log 4 = \log(25 \times 4)$

↓

$\log 100 = \log 10^2 = 2$

案情卷宗題幹

CASE #30 / 65

換底公式逆用求值

試求下列各式的值：

$$\frac{\log_2 243}{\log_2 9}$$

 柯南破案導引：解題思維：分子分母同底，合為 $\log_9 243$ ，再化為 3 的次方！

名偵探推理筆記 · 線索推理鏈

線索 1：換底公式逆運算 $\frac{\log_2 243}{\log_2 9} = \log_9 243$ 。

線索 2：提出 3 的次方求值 $9 = 3^2, 243 = 3^5$ ，故 $\log_3 3^5 = \frac{5}{2} \log_3 3 = \frac{5}{2}$ 。

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】 $\frac{\log_2 243}{\log_2 9} = \frac{5}{2}$

係數還原與同項相減

$$\log_2 2^3 - \log_2 8 = \log_2 8 - \log_2 8$$

↓

0

案情卷宗題幹

CASE #31 / 65

指數含零對數運算

試求下列各式的值：

$4^{\frac{\log_7 1}{\log_7 3}}$

 柯南破案導引：關鍵突破：注意到分子 $\log_7 1$ 是多少？任何以合規底數的 1 之對數值均為 0！

🔍 名偵探推理筆記 · 線索推理鏈

線索 1：計算分子的對數值 因為 $7^0 = 1$ ，所以 $\log_7 1 = 0$ 。

線索 2：計算次方分式與總值 次方為 $\frac{0}{\log_7 3} = 0$ ，因此 $4^0 = 1$ 。

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】 $4^{\frac{\log_7 1}{\log_7 3}} = 1$

方根乘積整合化簡

$\log_6 \sqrt{12} + \log_6 \sqrt{3} = \log_6 \sqrt{36}$

↓

$\log_6 6 = 1$

案情卷宗題幹

CASE #32 / 65

指數對數次方消去求值

試求下列各式的值：

$$3^{\log_9 16}$$

 柯南破案導引：解題思維：將 $\log_9 16$ 化為以 3 為底數的對數：
 $\log_3 4^2 = \log_3 4$ ！

名偵探推理筆記 · 線索推理鏈

線索 1：化簡對數項 $\log_9 16 = \log_{3^2} 4^2 = \frac{2}{2} \log_3 4 = \log_3 4$ 。

線索 2：代回原指數式互消 $3^{\log_9 16} = 3^{\log_3 4} = 4$ 。

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】 $3^{\log_9 16} = 4$

三項係數還原連除運算

$$\log \frac{2^2 \times 75}{3} = \log 100$$

↓

$$\log 10^2 = 2$$

案情卷宗題幹

CASE #33 / 65

對數倒數性質乘積

試求下列各式的值：

$$\log_2 5 \times \log_5 2$$

 柯南破案導引：公式要點：底數真數顛倒互為倒數： $\log_a b \times \log_b a = 1$ ！

名偵探推理筆記・線索推理鏈

線索 1：換為常用對數檢驗 $\log_2 5 \times \log_5 2 = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2} \times \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 5}$ 。

線索 2：交叉約分得出結論 分子與分母完全抵消，結果為 1。

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】 $\log_2 5 \times \log_5 2 = 1$

對數倒數性質乘積

$$\frac{\log 5}{\log 2} \times \frac{\log 2}{\log 5}$$

↓

1

倒數相乘恆為 1

案情卷宗題幹

CASE #34 / 65

三項對數連鎖律

試求下列各式的值：

$\log_2 3 \times \log_3 5 \times \log_5 8$

 柯南破案導引：公式要點：連鎖律骨牌約分：
 $\log_a b \times \log_b c \times \log_c d = \log_a d$ ！

名偵探推理筆記・線索推理鏈

線索 1：骨牌式首尾相接 前項真數 3 與中項底數 3 相約；中項真數 5 與後項底數 5 相約，首尾相接得 $\log_2 8$ 。

線索 2：計算結果 $8 = 2^3$ ，故 $\log_2 8 = 3$ 。

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】 $\log_2 3 \times \log_3 5 \times \log_5 8 = 3$

三項對數骨牌連鎖律

$\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 8 = \log_2 8$

↓

$\log_2 2^3 = 3$

案情卷宗題幹

CASE #35 / 65

對數倒數相乘求值

試求下列各式的值：

$$\log_4 6 \times \log_6 4$$

 柯南破案導引：解題思維：兩對數底真顛倒，相乘恆等於 1。

🔍 名偵探推理筆記・線索推理鏈

線索 1：檢驗底真關係 前項底數 4、真數 6；後項底數 6、真數 4，兩者互為倒數。

線索 2：連鎖約分得出結果 $\log_4 6 \times \log_6 4 = \log_4 4 = 1$ 。【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】 $\log_4 6 \times \log_6 4 = 1$

對數倒數相乘求值

$$\log_4 6 \times \log_6 4 = \log_4 4$$

↓

1

案情卷宗題幹

CASE #36 / 65

三項連鎖律求值

試求下列各式的值：

$\log_9 8 \times \log_8 7 \times \log_7 3$

 柯南破案導引：解題思維：連鎖律串聯約分得首尾 $\log_9 3$ ，再化為 3 的次方！

名偵探推理筆記 · 線索推理鏈

線索 1：連鎖首尾串聯 中間項真數 8 與底數 8 約去、真數 7 與底數 7 約去，得首尾 $\log_9 3$ 。

線索 2：化簡對數值 $9 = 3^2$ ，故 $\log_9 3 = \log_{3^2} 3^1 = \frac{1}{2} \log_3 3 = \frac{1}{2}$ 。

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】 $\log_9 8 \times \log_8 7 \times \log_7 3 = \frac{1}{2}$

三項連鎖律首尾相接

$\log_9 8 \cdot \log_8 7 \cdot \log_7 3 = \log_9 3$

↓

$\log_{3^2} 3^1 = \frac{1}{2}$

案情卷宗題幹

CASE #37 / 65

代數表示：質因數分解拆解真數

設 $\log_{10} 2 = x$ 、 $\log_{10} 3 = y$ 。

試以 x, y 表示：

$\log_{10} 12$

 柯南破案導引：解題思維：將 12 做質因數分解： $12 = 2^2 \times 3$ ，再拆成對數相加！

🔍 名偵探推理筆記 · 線索推理鏈

線索 1：真數質因數分解 $12 = 4 \times 3 = 2^2 \times 3$ 。

線索 2：對數性質展開
 $\log_{10} 12 = \log_{10}(2^2 \times 3) = \log_{10} 2^2 + \log_{10} 3 = 2 \log_{10} 2 + \log_{10} 3$ 。

線索 3：以 x, y 代換 代入 $\log_{10} 2 = x, \log_{10} 3 = y$ 得 $2x + y$ 。

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】 $\log_{10} 12 = 2x + y$

質因數分解拆解真數

$$12 = 2^2 \times 3 \implies \log 12 = 2 \log 2 + \log 3$$

↓

$$2a + b$$

案情卷宗題幹

CASE #38 / 65

代數表示：分數真數拆解

設 $\log_{10} 2 = x$ 、 $\log_{10} 3 = y$ 。

試以 x, y 表示：

$\log_{10} \frac{8}{9}$

 柯南破案導引：解題思維：分數拆成真數相減： $\log_{10} 8 - \log_{10} 9$ 。

🔍 名偵探推理筆記 · 線索推理鏈

線索 1：商化為對數相減 $\log_{10} \frac{8}{9} = \log_{10} 8 - \log_{10} 9$ 。

線索 2：質因數次方提出 $8 = 2^3, 9 = 3^2$ 。故
 $\log_{10} 2^3 - \log_{10} 3^2 = 3 \log_{10} 2 - 2 \log_{10} 3$ 。

線索 3：以 x, y 代換 $3x - 2y$ 。

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】 $\log_{10} \frac{8}{9} = 3x - 2y$

真數分數拆為對數差

$\log \frac{8}{9} = \log 2^3 - \log 3^2$

↓

$3a - 2b$

案情卷宗題幹

CASE #39 / 65

代數表示：換底公式與基準代換

設 $\log_{10} 2 = x$ 、 $\log_{10} 3 = y$ 。

試以 x, y 表示：

$\log_3 40$

 柯南破案導引：解題思維：底數為 3，已知條件為常用對數底數 10，先換底為 $\frac{\log_{10} 40}{\log_{10} 3}$ ！注意 $40 = 4 \times 10$ 。

名偵探推理筆記 · 線索推理鏈

線索 1：換為常用底數 10 $\log_3 40 = \frac{\log_{10} 40}{\log_{10} 3}$ 。

線索 2：拆解分子真數 40 $40 = 4 \times 10 = 2^2 \times 10$ 。分子為 $\log_{10}(2^2 \times 10) = 2\log_{10} 2 + \log_{10} 10 = 2x + 1$ 。

線索 3：結合分母得解 分母 $\log_{10} 3 = y$ 。故整體為 $\frac{2x+1}{y}$ 。

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】 $\log_3 40 = \frac{2x+1}{y}$

換底公式代數表示

$$\log_3 40 = \frac{\log 40}{\log 3} = \frac{2\log 2+1}{\log 3}$$

⇓

$$\frac{2a+1}{b}$$

案情卷宗題幹

CASE #40 / 65

代數表示：拆解乘積質因數

設 $\log_{10} 3 = x$ 、 $\log_{10} 5 = y$ 。試以 x, y 表示： $\log_{10} 45$  柯南破案導引：解題思維：將 45 做質因數分解： $45 = 9 \times 5 = 3^2 \times 5$ 。

名偵探推理筆記 · 線索推理鏈

線索 1：真數質因數分解 $45 = 3^2 \times 5$ 。線索 2：展開並代入代數符號 $\log_{10}(3^2 \times 5) = 2\log_{10} 3 + \log_{10} 5 = 2x + y$ 。【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】 $\log_{10} 45 = 2x + y$

乘積質因數拆解

$$45 = 3^2 \times 5 \implies 2\log 3 + \log 5$$

↓

$$2a + b$$

案情卷宗題幹

CASE #41 / 65

代數表示：商拆為對數差

設 $\log_{10} 3 = x$ 、 $\log_{10} 5 = y$ 。

試以 x, y 表示：

$\log_{10} \frac{25}{27}$

 柯南破案導引：解題思維：分子 $25 = 5^2$ 、分母 $27 = 3^3$ ，商化為差！

名偵探推理筆記 · 線索推理鏈

線索 1：展開為對數相減 $\log_{10} \frac{25}{27} = \log_{10} 25 - \log_{10} 27$ 。

線索 2：提出次方代換
 $\log_{10} 5^2 - \log_{10} 3^3 = 2 \log_{10} 5 - 3 \log_{10} 3 = 2y - 3x$ 。

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】 $\log_{10} \frac{25}{27} = 2y - 3x$

商拆為對數差

$\log \frac{25}{27} = 2 \log 5 - 3 \log 3$

↓

$2b - 3a$

案情卷宗題幹

CASE #42 / 65

代數表示：換底公式綜合應用

設 $\log_{10} 3 = x$ 、 $\log_{10} 5 = y$ 。

試以 x, y 表示：

$\log_{30} 15$

 柯南破案導引：解題思維：換底為 10： $\frac{\log_{10} 15}{\log_{10} 30}$ 。其中 $15 = 3 \times 5$ 。
 $30 = 3 \times 10$ ！

名偵探推理筆記 · 線索推理鏈

線索 1：換為常用對數 $\log_{30} 15 = \frac{\log_{10} 15}{\log_{10} 30}$ 。

線索 2：拆解分子與分母 分子： $\log_{10}(3 \times 5) = \log_{10} 3 + \log_{10} 5 = x + y$ 。
分母： $\log_{10}(3 \times 10) = \log_{10} 3 + \log_{10} 10 = x + 1$ 。

線索 3：得出代數式 $\frac{x+y}{x+1}$ 。

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】 $\log_{30} 15 = \frac{x+y}{x+1}$

換底公式綜合代換

$$\frac{\log 15}{\log 30} = \frac{\log 3 + \log 5}{\log 3 + 1}$$

↓

$$\frac{a+b}{a+1}$$

案情卷宗題幹

CASE #43 / 65

觀念辨析： $\log_a 1$ 的值

【觀念是非題】

若 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ，則 $\log_a 1 = 0$ 恆成立。

請判斷本敘述為 ○ 正確 或 × 錯誤？

 柯南破案導引：由指數定義：任何非零實數的 0 次方為何值？

名偵探推理筆記 · 線索推理鏈

線索 1：回顧指數式 若底數 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ，因為 $a^0 = 1$ 恆成立。

線索 2：轉化為對數定義 由對數定義 $a^x = b \iff x = \log_a b$ ，當 $x = 0, b = 1$ 時，必有 $\log_a 1 = 0$ 。

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】正確答案為 ○（真數為 1 時對數值恆為 0）



恆真命題

$a^0 = 1$ 恆成立 ($a > 0, a \neq 1$)
故 $\log_a 1 = 0$ 恆為真！

案情卷宗題幹

CASE #44 / 65

觀念辨析：真數相加與對數相加

【觀念是非題】

$\log_a(M + N) = \log_a M + \log_a N$ 恆成立。

請判斷本敘述為 ○ 正確 或 × 錯誤？

 柯南破案導引：反例引導：代入簡單數值檢驗，例如 $M = 2, N = 2$ 或 $M = 1, N = 1$ 。

名偵探推理筆記 · 線索推理鏈

線索 1：正確公式辨析 正確的對數加法性質為「同底相加化為真數相乘」： $\log_a M + \log_a N = \log_a(MN)$ ，而非真數相加！

線索 2：舉出具體反例 設 $a = 2, M = 2, N = 2$ ：左式為 $\log_2(2 + 2) = \log_2 4 = 2$ ；右式為 $\log_2 2 + \log_2 2 = 1 + 1 = 2$ （恰巧相等）。再取 $M = 1, N = 1$ ：左式為 $\log_2(1 + 1) = \log_2 2 = 1$ ；右式為 $\log_2 1 + \log_2 1 = 0 + 0 = 0 \neq 1$ 。故不恆成立！

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】正確答案為 ×（真數相加不可拆開；對數相加為真數相乘）



概念錯誤

× 錯誤：
 $\log_a(M + N) \neq \log_a M + \log_a N$
✓ 正確： $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$
反例： $\log(1 + 1) \neq \log 1 + \log 1 = 0$

案情卷宗題幹

CASE #45 / 65

觀念辨析：對數相除與對數相減

【觀念是非題】

$\frac{\log_a M}{\log_a N} = \log_a (M - N)$ 恆成立。

請判斷本敘述為 ○ 正確 或 × 錯誤？

 柯南破案導引：公式辨析：對數相除 $\frac{\log_a M}{\log_a N}$ 是什麼公式？對數相減 $\log_a M - \log_a N$ 又是什麼？

名偵探推理筆記 · 線索推理鏈

線索 1：辨析兩側性質 左式 $\frac{\log_a M}{\log_a N}$ 為換底公式逆用，等於 $\log_N M$ ；而右式 $\log_a (M - N)$ 真數相減不可拆解。

線索 2：正確減法公式 正確的減法公式為 $\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$ （是真數相除，不是對數相除）。

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】正確答案為 ×（ $\frac{\log_a M}{\log_a N} = \log_N M$ 為換底公式，不等於 $\log_a (M - N)$ ）



概念錯誤

× 錯誤： $\frac{\log_a M}{\log_a N} = \log_N M$ （換底結果）

✓ 正確減法：
 $\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$

案情卷宗題幹

CASE #46 / 65

觀念辨析：真數為負數之次方提出

【觀念是非題】

$\log_3(-3)^2 = 2\log_3(-3)$ 恆成立。

請判斷本敘述為 ○ 正確 或 × 錯誤？

 柯南破案導引：陷阱提醒：請務必檢查右式對數的真數是否符合存在定義！

名偵探推理筆記 · 線索推理鏈

線索 1：計算左式之值 左式真數為 $(-3)^2 = 9 > 0$ ，所以左式為 $\log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$ ，數值完全合法且有意義。

線索 2：檢驗右式之合法性 右式出現 $\log_3(-3)$ ，但其真數為 $-3 < 0$ ！由對數定義，真數必須嚴格大於 0，因此右式根本無意義！等式不成立。

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】正確答案為 ×（右式真數 $-3 < 0$ 無意義，次方提出前提為底真數均合法）



忽略定義域

✓ 左式： $\log_3(-3)^2 = \log_3 9 = 2$ （合法）

× 右式： $2\log_3(-3)$ 無意義！（真數 < 0 ）

案情卷宗題幹

CASE #47 / 65

觀念辨析：真數為正時對數值的正負

【觀念是非題】

若 $b > 0$ ，則 $\log_{10} b > 0$ 恆成立。

請判斷本敘述為 ○ 正確 或 × 錯誤？

 柯南破案導引：反例引導：當真數介於 0 與 1 之間 (如 $b = 0.1$) 時，對數值是多少？

名偵探推理筆記 · 線索推理鏈

線索 1：分析對數值與真數的關係 以常用對數 $\log_{10} b$ 為例：當 $b > 1$ 時， $\log_{10} b > 0$ ；當 $b = 1$ 時， $\log_{10} 1 = 0$ ；當 $0 < b < 1$ 時， $\log_{10} b < 0$ 。

線索 2：舉出反例 取 $b = 0.1 > 0$ ： $\log_{10} 0.1 = \log_{10} 10^{-1} = -1 < 0$ 。此時真數大於 0，但對數值為負數！

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】正確答案為 × (當 $0 < b < 1$ 時， $\log_{10} b < 0$)



對數值可負

× 迷思：真數為正不代表對數值為正！

反例：
 $\log_{10} 0.1 = \log_{10} 10^{-1} = -1 < 0$

案情卷宗題幹

CASE #48 / 65

對數存在的必要條件求範圍

若 $\log_{x-2}(7-x)$ 有意義 ·

則 x 的範圍為何？

 柯南破案導引：底數 $x-2 > 0$ 且 $x-2 \neq 1$ ；真數 $7-x > 0$ 。三者取交集！

名偵探推理筆記 · 線索推理鏈

線索 1：列出真數條件 真數大於 0： $7-x > 0 \implies x < 7$ 。

線索 2：列出底數條件 底數大於 0 且不為 1： $x-2 > 0 \implies x > 2$ ；且 $x-2 \neq 1 \implies x \neq 3$ 。

線索 3：取交集得出範圍 $2 < x < 7$ 且 $x \neq 3$ 。

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】 $2 < x < 7$ 且 $x \neq 3$

數線交集圖解： $2 < x < 7$ 且 $x \neq 3$



解集合： $2 < x < 7$ 且 $x \neq 3$

案情卷宗題幹

CASE #49 / 65

基礎對數特徵值求和

試求下列各式的值：

$$\log_{10} 10 + \log_{10} 1$$

 柯南破案導引：解題思維：直接套用基本性質： $\log_a a = 1$ 與 $\log_a 1 = 0$ 。

名偵探推理筆記 · 線索推理鏈

線索 1：分別求得各項對數值 第一項： $\log_{10} 10 = 1$ ；第二項： $\log_{10} 1 = 0$ 。線索 2：兩數相加 $1 + 0 = 1$ 。【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】 $\log_{10} 10 + \log_{10} 1 = 1$

特徵值直接計算

$$\log_{10} 10 = 1, \log_{10} 1 = 0$$

↓

$$1 + 0 = 1$$

案情卷宗題幹

CASE #50 / 65

方根底數與小數對數混合求值

試求下列各式的值：

$$\log_{\sqrt{2}} 2 + \log_9 \sqrt{3} - \log_{0.5} 0.125$$

 柯南破案導引：解題思維：各項分別化為指數次方提係數：
 $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}, 9 = 3^2, \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}, 0.125 = (0.5)^3$ 。

名偵探推理筆記 · 線索推理鏈

線索 1：計算第一項 $\log_{2^{\frac{1}{2}}} 2^1 = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ 。

線索 2：計算第二項 $\log_9 3^{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$ 。

線索 3：計算第三項並加減 $0.125 = (0.5)^3 \implies \log_{0.5}(0.5)^3 = 3$ 。
全部加減： $2 + \frac{1}{4} - 3 = -1 + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$ 。

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】原式 = $-\frac{3}{4}$

三項化簡求和

$$\log_2 4 + \log_{16} 2 - \log_{\frac{1}{2}} 27 = 2 + \frac{1}{4} - (-3)$$

⇓

$$2 + \frac{1}{4} + 3 = \frac{21}{4}$$

案情卷宗題幹

CASE #51 / 65

同底對數加法求值

試求下列各式的值：

$$\log_{12} 4 + \log_{12} 36$$

 柯南破案導引：解題思維：同底對數相加等於真數相乘： 4×36 。

🔍 名偵探推理筆記・線索推理鏈

線索 1：合併真數相乘 $\log_{12} 4 + \log_{12} 36 = \log_{12} (4 \times 36) = \log_{12} 144$ 。

線索 2：化簡對數值 $144 = 12^2$ ，故 $\log_{12} 12^2 = 2$ 。

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】 $\log_{12} 4 + \log_{12} 36 = 2$

同底對數加法真數相乘

$$\log_{12} (4 \times 36) = \log_{12} 144$$

↓

$$\log_{12} 12^2 = 2$$

案情卷宗題幹

CASE #52 / 65

常用對數加減運算

試求下列各式的值：

$$\log_{10} 25 + \log_{10} 12 - \log_{10} 3$$

 柯南破案導引：解題思維：加項放分子，減項放分母： $\frac{25 \times 12}{3}$ 。

 名偵探推理筆記 · 線索推理鏈

線索 1：合併真數乘除 $\log_{10} 25 + \log_{10} 12 - \log_{10} 3 = \log_{10} \left(\frac{25 \times 12}{3} \right)$ 。

線索 2：約分計算真數 $\frac{25 \times 12}{3} = 25 \times 4 = 100$ 。

線索 3：求出對數值 $100 = 10^2$ ，故 $\log_{10} 100 = 2$ 。

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】原式 = 2

常用對數約分化簡

$$\log_{10} \frac{25 \times 12}{3} = \log_{10} 100$$

↓

$$\log_{10} 10^2 = 2$$

案情卷宗題幹

CASE #53 / 65

係數還原次方後對數加減

試求下列各式的值：

$$2\log_5 10 - 4\log_5 2 + \log_5 20$$

 柯南破案導引：關鍵步驟：先將前方的係數移回真數當次方：
 $2\log_5 10 = \log_5 10^2$ 、 $4\log_5 2 = \log_5 2^4$ ！

名偵探推理筆記・線索推理鏈

線索 1：係數移入真數次方 原式
 $= \log_5 10^2 - \log_5 2^4 + \log_5 20 = \log_5 100 - \log_5 16 + \log_5 20$ 。

線索 2：合併真數乘除約分 $\log_5 \left(\frac{100 \times 20}{16} \right) = \log_5 \left(\frac{2000}{16} \right) = \log_5 125$ 。

線索 3：求出對數值 $125 = 5^3$ ，故 $\log_5 125 = 3$ 。

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】原式 = 3

係數還原次方後對數加減

$$\log_5 \frac{100 \times 20}{16} = \log_5 125$$

↓

$$\log_5 5^3 = 3$$

案情卷宗題幹

CASE #54 / 65

指數分式換底化簡

試求下列各式的值：

$$4^{\frac{\log_7 16}{\log_7 4}}$$

 柯南破案導引：解題思維：換底公式逆用： $\frac{\log_7 16}{\log_7 4} = \log_4 16$ ！

🔍 名偵探推理筆記 · 線索推理鏈

線索 1：化簡次方部分 由換底公式逆用： $\frac{\log_7 16}{\log_7 4} = \log_4 16$ 。而
 $\log_4 16 = \log_4 4^2 = 2$ 。

線索 2：計算指數次方 原式變為 $4^2 = 16$ （或直接利用 $4^{\log_4 16} = 16$ 互消）。

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】原式 = 16

次方倒數換底逆用

$$\text{\text{次方}} \ \frac{1}{\log_7(16) \ 4} = \log_4 16$$
$$= 2$$

⇓

$$4^2 = 16$$

案情卷宗題幹

CASE #55 / 65

指數對數相減與換底

試求下列各式的值：

$$3^{\log_9 20 - \log_9 5}$$

 柯南破案導引：解題思維：先算次方減法： $\log_9 20 - \log_9 5 = \log_9 4$ ，再換為以 3 為底！

名偵探推理筆記 · 線索推理鏈

線索 1：化簡次方對數減法 $\log_9 20 - \log_9 5 = \log_9 \left(\frac{20}{5} \right) = \log_9 4$ 。

線索 2：底數與次方對齊 $\log_9 4 = \log_{3^2} 2^2 = \frac{2}{2} \log_3 2 = \log_3 2$ 。

線索 3：指數對數互消 $3^{\log_3 2} = 2$ 。

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】原式 = 2

減法商數與指數互消

$$\text{次方} \log_3 6 - \log_3 2 = \log_3 3 = 1$$

↓

$$3^1 = 3$$

案情卷宗題幹

CASE #56 / 65

巢狀對數由內而外求值

試求下列各式的值：

$$\log_9(\log_2 8)$$

 柯南破案導引：解題思維：括號優先！先由內層算出 $\log_2 8$ ，再將結果作為外層真數！

名偵探推理筆記 · 線索推理鏈

線索 1：計算內層對數 內層真數：因為 $8 = 2^3$ ，所以 $\log_2 8 = 3$ 。

線索 2：計算外層對數 代入外層得 $\log_9 3 = \log_{3^2} 3^1 = \frac{1}{2} \log_3 3 = \frac{1}{2}$ 。

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】 $\log_9(\log_2 8) = \frac{1}{2}$

巢狀對數分層剝離

$\text{內層} \ \log_2 8 = 3 \implies \text{外層} \ \log_9 3$

↓

$$\log_{3^2} 3 = \frac{1}{2}$$

案情卷宗題幹

CASE #57 / 65

三項對數連鎖律乘積

試求下列各式的值：

$\log_9 7 \times \log_7 100 \times \log_{10} 3$

 柯南破案導引：解題思維：先將各項次方提前 ($9 = 3^2, 100 = 10^2$) · 再使用連鎖律約分！

名偵探推理筆記 · 線索推理鏈

線索 1：底數與真數次方提出 $\log_9 7 = \log_{3^2} 7 = \frac{1}{2} \log_3 7$;
 $\log_7 100 = \log_7 10^2 = 2 \log_7 10$ 。

線索 2：係數相乘與連鎖律約分 係數相乘： $\frac{1}{2} \times 2 = 1$ 。
對數連鎖相乘： $\log_3 7 \times \log_7 10 \times \log_{10} 3 = \log_3 3 = 1$ 。

線索 3：得出總乘積 $1 \times 1 = 1$ 。

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】原式 = 1

連鎖律閉環約分

$$\left(\frac{1}{2} \times 2\right) \cdot (\log_3 7 \cdot \log_7 10 \cdot \log_{10} 3)$$

⇓

$$1 \times \log_3 3 = 1$$

案情卷宗題幹

CASE #58 / 65

進階代數換底表達

設 $a = \log_{10} 2$ 、 $b = \log_{10} 3$ 。

若以 a, b 表示，則：

$\log_{12} 5 = ?$

 柯南破案導引：關鍵技巧：以 10 為底換底！注意 $5 = \frac{10}{2}$ ，故 $\log_{10} 5 = 1 - \log_{10} 2 = 1 - a$ ！

名偵探推理筆記 · 線索推理鏈

線索 1：換為常用對數 $\log_{12} 5 = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 12}$ 。

線索 2：轉化分子 **log 5** $\log_{10} 5 = \log_{10} \left(\frac{10}{2} \right) = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = 1 - a$ 。

線索 3：轉化分母 **log 12** 並代入
 $\log_{10} 12 = \log_{10} (2^2 \times 3) = 2 \log_{10} 2 + \log_{10} 3 = 2a + b$ 。
故原式 $= \frac{1-a}{2a+b}$ 。

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】 $\log_{12} 5 = \frac{1-a}{2a+b}$

核心代換 $\log 5 = 1 - \log 2$

$$\log_{12} 5 = \frac{\log 5}{\log 12} = \frac{1-a}{\log(2^2 \times 3)}$$

⇓

$$\frac{1-a}{2a+b}$$

案情卷宗題幹

CASE #59 / 65

常用對數近似值： $\log_{10} 6$

已知 $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ 、 $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ 。

試求下列各式之值：

$\log_{10} 6 \approx ?$

 柯南破案導引：解題思維：將 6 質因數分解： $6 = 2 \times 3$ ，拆為兩對數相加！

🔍 名偵探推理筆記 · 線索推理鏈

線索 1：真數分解為 2 與 3 之積 $\log_{10} 6 = \log_{10}(2 \times 3) = \log_{10} 2 + \log_{10} 3$ 。

線索 2：代入近似值相加 $0.3010 + 0.4771 = 0.7781$ 。

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】 $\log_{10} 6 \approx 0.7781$

常用對數近似值相加

$\log 6 = \log 2 + \log 3$



$0.3010 + 0.4771 = 0.7781$

案情卷宗題幹

CASE #60 / 65

常用對數近似值： $\log_{10} 5$

已知 $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ 、 $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ 。

試求下列各式之值：

$\log_{10} 5 \approx ?$

 柯南破案導引：關鍵技巧： $\log_{10} 5 = \log_{10} \frac{10}{2} = 1 - \log_{10} 2$ ！

名偵探推理筆記 · 線索推理鏈

線索 1：轉為 10 與 2 之商

$$\log_{10} 5 = \log_{10} \left(\frac{10}{2} \right) = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = 1 - \log_{10} 2。$$

線索 2：代入計算小數減法 $1 - 0.3010 = 0.6990$ 。

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】 $\log_{10} 5 \approx 0.6990$

常用對數互補關係

$$\log 5 = 1 - \log 2$$

↓

$$1 - 0.3010 = 0.6990$$

案情卷宗題幹

CASE #61 / 65

常用對數近似值： $\log_{10} \frac{3}{2}$

已知 $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ 、 $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ 。

試求下列各式之值：

$$\log_{10} \frac{3}{2} \approx ?$$

 柯南破案導引：解題思維：真數相除拆為對數相減： $\log_{10} 3 - \log_{10} 2$ 。

名偵探推理筆記 · 線索推理鏈

線索 1：商拆為對數差 $\log_{10} \frac{3}{2} = \log_{10} 3 - \log_{10} 2$ 。

線索 2：代入數值相減 $0.4771 - 0.3010 = 0.1761$ 。

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】 $\log_{10} \frac{3}{2} \approx 0.1761$

商對數近似值相減

$$\log \frac{3}{2} = \log 3 - \log 2$$

↓

$$0.4771 - 0.3010 = 0.1761$$

案情卷宗題幹

CASE #62 / 65

對數定義與指數次方求值

設 $x = \log_{10} 5$.

試求 :

$100^x + 10^{-x} = ?$

 柯南破案導引：關鍵還原：由 $x = \log_{10} 5$ 得 $10^x = 5$! 再求 $100^x = (10^x)^2$ 與 $10^{-x} = \frac{1}{10^x}$!

名偵探推理筆記 · 線索推理鏈

線索 1：還原指數式 $x = \log_{10} 5 \iff 10^x = 5$.

線索 2：計算各項指數值 $100^x = (10^2)^x = (10^x)^2 = 5^2 = 25$;
 $10^{-x} = \frac{1}{10^x} = \frac{1}{5} = 0.2$.

線索 3：兩數相加求和 $25 + \frac{1}{5} = \frac{126}{5} = 25.2$.

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】 $100^x + 10^{-x} = \frac{126}{5}$ (或 25.2)

對數定義轉指數求值

$\log_{10} 5 = x \implies 10^x = 5$

↓

$100^x + 10^{-x} = 5^2 + \frac{1}{5} = \frac{126}{5}$

案情卷宗題幹

CASE #63 / 65

對數多項式乘法展開

試求下列各式的值：

$$(\log_2 3 + \log_4 9)(\log_3 4 + \log_9 2)$$

 柯南破案導引：解題思維：先化簡各括號內的項： $\log_4 9 = \log_{2^2} 3^2 = \log_2 3$ ；同理化簡第二個括號！

名偵探推理筆記 · 線索推理鏈

線索 1：化簡第一括號 $\log_4 9 = \log_{2^2} 3^2 = \log_2 3$ 。
第一括號為 $\log_2 3 + \log_2 3 = 2 \log_2 3$ 。

線索 2：化簡第二括號 $\log_3 4 = \log_3 2^2 = 2 \log_3 2$ ；
 $\log_9 2 = \log_{3^2} 2 = \frac{1}{2} \log_3 2$ 。
第二括號為 $2 \log_3 2 + \frac{1}{2} \log_3 2 = \frac{5}{2} \log_3 2$ 。

線索 3：相乘並利用倒數性質
 $(2 \log_2 3) \times (\frac{5}{2} \log_3 2) = (2 \times \frac{5}{2}) \times (\log_2 3 \times \log_3 2) = 5 \times 1 = 5$ 。

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】原式 = 5

同底化簡再相乘

$$(2 \log_2 3) \times (\frac{5}{2} \log_3 2)$$

↓

$$5 \times (\log_2 3 \cdot \log_3 2) = 5 \times 1 = 5$$

案情卷宗題幹

CASE #64 / 65

芮氏地震規模公式：求規模 M

【生活素養應用題】

芮氏地震規模 M 和地震波所釋放的能量 E (單位：爾格) 之關係式為：

$$\log_{10} E = 11.8 + 1.5M$$

若有一地震波釋放了 $10^{19.3}$ 爾格的能量，

則此地震波的芮氏規模為何？

 柯南破案導引：將能量 $E = 10^{19.3}$ 代入關係式左邊，注意 $\log_{10} 10^{19.3} = 19.3$ ！

名偵探推理筆記 · 線索推理鏈

線索 1：將能量代入關係式左式 $\log_{10} E = \log_{10}(10^{19.3}) = 19.3$ 。

線索 2：列出一元一次方程式 $19.3 = 11.8 + 1.5M$ 。

線索 3：移項解出 M $1.5M = 19.3 - 11.8 = 7.5 \implies M = \frac{7.5}{1.5} = 5.0$ 。

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】芮氏規模為 5.0 (或 5)

芮氏地震規模公式求 M

$$19.3 = 11.8 + 1.5M \implies 1.5M = 7.5$$

↓

$$M = 5.0$$

案情卷宗題幹

CASE #65 / 65

921 集集大地震能量換算

【生活素養應用題】

芮氏地震規模 M 和釋放能量 E 關係式為：

$$\log_{10} E = 11.8 + 1.5M$$

921 集集大地震的芮氏規模為 7.3，

則其震央所釋放的能量為多少爾格？

 柯南破案導引：將規模 $M = 7.3$ 代入右式，算出 $\log_{10} E$ ，再轉為指數式 $E = 10^{\text{次方}}$ ！

🔍 名偵探推理筆記 · 線索推理鏈

線索 1：將 $M = 7.3$ 代入右式計算 $\log_{10} E = 11.8 + 1.5 \times 7.3$ 。
先算 $1.5 \times 7.3 = 10.95$ 。

線索 2：相加求得對數值 $\log_{10} E = 11.8 + 10.95 = 22.75$ 。

線索 3：還原為能量數值 由對數定義 $E = 10^{22.75}$ 爾格。

【CASE CLOSED 真相永遠只有一個！】釋放能量為 $10^{22.75}$ 爾格

921 集集大地震能量換算

$$\log_{10} E = 11.8 + 1.5(7.3) = 22.75$$

⇓

$$E = 10^{22.75} \text{ 爾格}$$